Devoir maison n°2

Voici un encart présent dans la revue Hors Série de Sciences et Avenir n°191 – octobre-novembre 2017.

••• EN 2017 •••

Pourquoi ne peut-on toujours pas diviser par zéro ?

L'apparition du zéro n'a pas manqué d'entraîner quelques situations compliquées. C'est, par exemple, le cas de la division par 0. Tout d'abord, il faut garder à l'esprit qu'il existe non pas quatre opérations arithmétiques élémentaires, mais deux. Soustraire un nombre revient en effet à ajouter son opposé. C'est donc une addition à peine déguisée. Il en est de même lorsqu'on divise par un nombre : on multiplie en fait par son inverse. Diviser par zéro reviendrait donc à multiplier par l'inverse de zéro.

Soit z, un nombre quelconque. Par définition, l'inverse de z est le nombre z' tel que z x z' = 1. Trouver l'inverse de 0, c'est trouver un nombre z' tel que 0 x z' = 1. Ce qui est évidemment impossible, car on peut multiplier

n'importe quoi par zéro, on obtiendra toujours zéro. Zéro n'a donc pas d'inverse. Par conséquent, on ne peut pas multiplier par l'inverse de zéro.

Par ailleurs, une fraction ayant 0 au dénominateur est indéterminée : ni égale à 0, ni égale à l'infini, elle est un contresens mathématique. Autrement, les opérations les plus simples nous fourniraient des absurdités… Du genre : 1 est égal à 2. Petite démonstration : supposons que a=b. Multiplions les deux membres de l'équation par a. Ce qui nous donne $a^2 = ab$. Ajoutons à chaque terme $a^2 - 2ab$, soit $a^2 + a^2 - 2ab = ab + a^2 - 2ab$. D'où, par factorisation : $2(a^2 - ab) = a^2 - ab$. Et par simplification : 2 = 1. Pourtant, il n'y a pas d'erreur dans ces opérations. Simplement, comme a=b, $a^2 - 2ab = 0$. Simplifier par $(a^2 - ab)$ revient donc à diviser par zéro… ce qui est impossible. Par convention, la division par zéro donne un résultat qui tend vers l'infini. V. R.

1) Lire cet article. (On peut le lire aussi en ligne ici)
2) Qu'appelle-t-on dans cet article les *quatre opérations arithmétiques élémentaires* ?
3) « Soustraire un nombre revient en effet à ajouter son opposé »

   Donner deux exemples illustrant cette phrase.
4) « Lorsqu'on divise par un nombre : on multiplie en fait par son inverse »

   Donner deux exemples illustrant cette phrase.
5) La démonstration :

Supposons que a=b. Multiplions les deux membres de l'équation par a. Ce qui nous donne $a^2 = ab$. Ajoutons à chaque terme $a^2 - 2ab$, soit $a^2 + a^2 - 2ab = ab + a^2 - 2ab$. D'où, par factorisation : $2(a^2 - ab) = a^2 - ab$. Et par simplification : 2 = 1. Pourtant, il n'y a pas d'erreur dans ces opérations. Simplement, comme a=b, $a^2 - 2ab = 0$.

Il y a une erreur dans cette démonstration (une faute de frappe) : la retrouver et l'expliquer.